

Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

(AL 5 Prop: Soit φ une forme linéaire sur $M_n(K)$
5 ($\varphi \in M_n(K)^*$). Alors il existe une unique matrice
Rou 458 $A \in M_n(K)$ tel que $\varphi(B) = \text{Tr}(AB)$ pour tout
458 $B \in M_n(K)$

Preuve: On pose

$$\Phi: M_n(K) \rightarrow M_n(K)^*$$

$$A \mapsto \varphi_A: B \mapsto \text{Tr}(AB)$$

On observe que Φ est linéaire grâce à la linéarité de la trace

Soit $A \in K e_{ij}$. Alors $\text{Tr}(AB) = 0$ pour tout
 $B \in M_n(K)$. Alors pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a
 $\text{Tr}(A E_{ij}) = 0$

On:

$$A E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{j-ième colonne} \\ \\ \text{i-ième ligne} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{1i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{ii} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{ni} & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
j-ième colonne

$$\text{Donc } \text{Tr}(A E_{ij}) = a_{ji}$$

On can:

$$A E_{ij} = \sum_{h,l} a_{h,l} E_{h,l} E_{ij}$$

$$= \sum_{h,l} a_{h,l} \delta_{li} E_{hj} = \sum_h a_{hi} E_{hj}$$

$$\text{Donc } T_n(A E_j) = \sum_k a_{kj} T_n(E_k) = a_{ji}$$

Donc tous les coefficients de A sont nuls: $A=0$.

Donc ϕ est injective.

$$\text{On } \dim(M_n(K)) = \dim(M_n(K)^*) = n^2$$

Donc ϕ est un isomorphisme.

Ainsi pour tout $\varphi \in M_n(K)^*$, il existe une unique matrice $A \in M_n(K)$ tel que

$$\varphi(X) = T_n(AX) \quad \forall X \in M_n(K)$$

CAL

5

Application: Soit $\varphi \in M_n(K)^*$, tel que $\varphi(XY) = \varphi(YX)$

$\forall X, Y \in M_n(K)$.

Alors $\varphi = \lambda T_n$ pour un $\lambda \in K$

Preuve: On a T_n est une forme linéaire qui vérifie $T_n(AB) = T_n(BA) \quad \forall A, B \in M_n(K)$.

Soit $\varphi \in M_n(K)^*$. Soit $A \in M_n(K)$ tel que

$$\varphi(X) = T_n(AX) \quad \forall X \in M_n(K)$$

Comme φ vérifie $\varphi(XY) = \varphi(YX)$, alors

$$\varphi(XY) = T_n(AXY) = \cancel{T_n(AYX)}$$

$$\text{et } \varphi(YX) = T_n(AYX) = T_n(XAY)$$

Ainsi on a:

$$T_n((AX - XA)Y) = 0 \quad \forall X, Y \in M_n(K)$$

$$\text{Donc } \phi((AX - XA)Y) = 0 \quad \forall X, Y \in M_n(K)$$

$$\text{D'où: } \phi(AX - XA) = 0 \quad \forall X \in M_n(K)$$

Par injectivité de ϕ , on a que

$$AX - XA = 0 \quad \forall X \in M_n(K)$$

$$AX = XA$$

Donc A commute avec toutes les matrices

On en peut montrer que le centre de $M_n(K)$ est formé des homothéties;

• Les homothéties commutent clairement avec toutes les matrices

• Soit $A \in Z(M_n(K))$, alors $A E_{ij} = E_{ij} A$

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Alors:

$$A E_{ij} e_j = A e_i = \sum_{h=1}^n a_{hi} e_h$$

$$= E_{ij} A e_j = E_{ij} \left(\sum_{h=1}^n a_{hj} e_h \right) = a_{ij} e_i$$

Ainsi $a_{hi} = 0$ pour $h \neq i$

et $a_{ii} = a_{jj}$. Donc $A = \lambda I_n$

$$\text{Ainsi: } \ell(x) = T_n(Ax)$$

$$= T_n(\lambda I_n x) = \lambda \cdot T_n(x) \quad \forall x \in M_n(K)$$

Application: Tout hyperplan de $M_n(K)$ contient au moins une matrice inversible.

Preuve: Soit H un hyperplan de $M_n(K)$. Ainsi il existe $\ell \in M_n(K)^*$ non nulle tel que $H = \text{Ker}(\ell)$

Soit $A \in M_n(K)$ tel que $\ell(x) = T_n(Ax) \quad \forall x \in M_n(K)$ d'après la prop.

Donc A est non nulle, donc son rang r est ≥ 1

On cherche $x \in GL_n(K)$ tel que $x \in H$, c'est

$$T_n(Ax) = 0$$

032 A est de rang r donc équivalente à

$$I_n = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ainsi il existe } P, Q \in GL_n(K) \text{ tel que } A = P \cdot I_n \cdot Q$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } T_n(Ax) &= T_n(P J_n Q X) \\ &= T_n((QX)(P J_n)) \\ &= T_n(J_n (X P)) \end{aligned}$$

Soit $Y = QX$. Alors X est inversible ssi Y est inversible.

On cherche donc Y inversible tel que $T_n(J_n Y) = 0$

On peut prendre :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice de permutation})$$

Car $\det(Y) = (-1)^n$ (développé par rapport à la première ligne)

Et en fait Y agit sur les colonnes de J_n :

C_1 s'envoie sur C_n

C_2 s'envoie sur C_1

...

C_n s'envoie sur C_{n-1}

Donc :

$$J_n Y = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 1 & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } T_n(J_n Y) = 0$$